



دفترچه سؤالات مرحله دوم

نهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۹

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سؤالات	
	مسأله‌های تشریحی	سؤالات چند گزینه‌ای
۱۶۰	۴	-

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه

کنید:

- این آزمون شامل ۴ مسأله‌ی تشریحی و وقت آن ۱۶۰ دقیقه است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سؤالات توسط کمیته‌ی اجرایی ماخ انجام شده است.

تالارهای دوستی



یک مدرسه، سه تالار اجتماع A ، B و C دارد. یک روز، همه‌ی دانش‌آموزان در تالار A جمع شدند و معلوم شد هر دانش‌آموز لاقل $s+t$ نفر را می‌شناسد. بعد از این، تعدادی از دانش‌آموزان به تالار B و تعدادی به تالار C رفتند. می‌دانیم که در تالار B هر نفر لاقل s نفر را در همان تالار می‌شناسد و در تالار C نیز هر نفر حداقل t نفر را در همان تالار می‌شناسد. ثابت کنید افرادی که در تالار A مانده‌اند را می‌توان به‌گونه‌ای بین دو تالار B و C تقسیم کرد، به‌طوری‌که بعد از تقسیم باز هم هر نفر در تالار B لاقل s نفر از افراد همان تالار و هر نفر در تالار C لاقل t نفر از افراد همان تالار را بشناسد (فرض کنید آشنایی یک رابطه‌ی دو طرفه است، یعنی اگر a شخص b را بشناسد b نیز a را می‌شناسد).

جست‌وجوی عدد در جدول



یک جدول $n \times n$ ، شامل اعداد طبیعی و یک ماشین مقایسه‌گر در اختیار داریم. می‌دانیم در این جدول، اعداد در هر سطر و در هر ستون به‌صورت اکیداً صعودی مرتب‌شده‌اند. می‌خواهیم عدد k را در جدول جست‌وجو کنیم. برای این کار در هر مرحله، می‌توانیم یک کارت شامل دو عدد i و j به ماشین بدهیم و ماشین با گرفتن این کارت به ما پاسخ می‌دهد که عددی که در خانه‌ی سطر i و ستون j قرار دارد، بزرگ‌تر، کوچک‌تر، یا مساوی k است. روشی ارائه دهید که با حداکثر $2n - 1$ کارت ورودی مشخص کند که k در این جدول وجود دارد یا نه؛ و در صورت وجود k ، جای آن را در جدول مشخص کند.

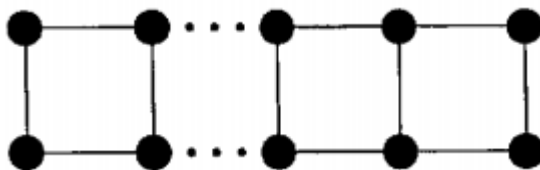
روش خود را با پاسخ به سؤالات زیر بیان کنید و درستی آن را ثابت کنید:

- با چه کارتی شروع می‌کنید؟
- بعد از دادن هر کارت و با توجه به جوابی که ماشین می‌دهد، چه کارتی را به ماشین می‌دهید؟

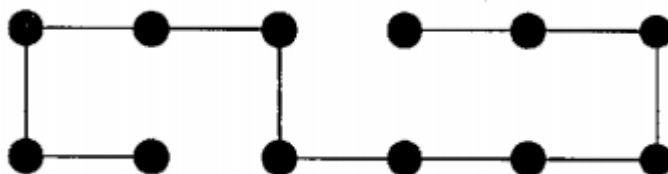
مسیر فراگیر



شکل زیر شامل $2n$ دایره است که به وسیله‌ی $2n - 2$ پاره‌خط به یکدیگر متصل شده‌اند.



می‌خواهیم یکی از دایره‌ها را انتخاب کنیم و با شروع از آن و حرکت روی پاره‌خط‌ها، از همه‌ی دایره‌ها بگذریم و در یک دایره (غیر از دایره‌ی اول) کار خود را خاتمه دهیم، به‌طوری‌که در طول حرکت هر دایره را دقیقاً یک‌بار ملاقات کنیم. به‌عنوان نمونه اگر n برابر ۶ باشد، شکل زیر یکی از مسیرهای ممکن را نشان می‌دهد. ثابت کنید تعداد مسیرهایی که در شرط‌های گفته‌شده صدق می‌کنند برابر $n^2 - n + 2$ است.



۴- بازی دور میز



n نفر با شماره‌های ۱ تا n ($n > 1$) دور میزی نشسته‌اند و هرکدام k مهره در اختیار دارند. از نفر اول بازی زیر را شروع می‌کنیم. نفر اول مهره‌ی خود را به نفر دوم می‌دهد و از این به بعد هر نفر که از نفر قبلی خود یک مهره دریافت کرده باشد دو مهره به نفر بعدی خود می‌دهد و اگر دو مهره دریافت کرده باشد، یک مهره به نفر بعدی می‌دهد. در این بازی منظور از نفر بعدی، نزدیک‌ترین فرد در جهت عقربه‌های ساعت است. به محض آن‌که فردی مهره‌هایش را از دست بدهد از دور میز کنار می‌رود. مثلاً اگر $k = 1$ باشد، در ابتدای بازی نفر ۱ و ۲ از دور خارج می‌شوند.

الف) ثابت کنید اگر $k > 1$ و n توانی از ۲ باشد، بازی پایان می‌پذیرد.

ب) ثابت کنید اگر $k = 1$ باشد، بازی تنها در صورتی پایان می‌یابد که $n - 1$ یا $n - 2$ توانی از ۲ باشد.